

## 3. DERIVACE FUNKCE

- 3.7 Funkce rostoucí a klesající, extrémny funkce
- 3.8 Funkce konvexní a konkávní, inflexní body
- 3.9 Asymptoty grafu funkce
- 3.10 Průběh funkce

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

### 3.7 Funkce rostoucí a klesající, extrémny funkce

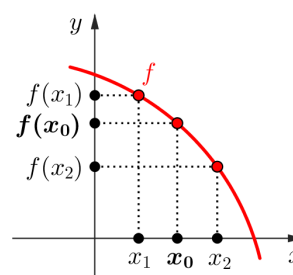
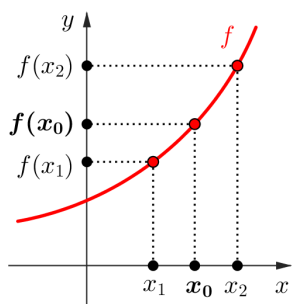
#### Definice

Funkce  $f$  je **rostoucí v bodě**  $x_0$ , existuje-li okolí  $\mathcal{U}(x_0) \subset D(f)$  takové, že

- 1)  $\forall x_1 \in \mathcal{U}(x_0), x_1 < x_0 : f(x_1) < f(x_0)$ ,
- 2)  $\forall x_2 \in \mathcal{U}(x_0), x_2 > x_0 : f(x_2) > f(x_0)$ .

Funkce  $f$  je **klesající v bodě**  $x_0$ , existuje-li okolí  $\mathcal{U}(x_0) \subset D(f)$  takové, že

- 1)  $\forall x_1 \in \mathcal{U}(x_0), x_1 < x_0 : f(x_1) > f(x_0)$ ,
- 2)  $\forall x_2 \in \mathcal{U}(x_0), x_2 > x_0 : f(x_2) < f(x_0)$ .



## Věta

Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivaci

- $f'(x_0) > 0$ , pak je funkce  $f$  v bodě  $x_0$  **rostoucí**,
- $f'(x_0) < 0$ , pak je funkce  $f$  v bodě  $x_0$  **klesající**.

## Věta

Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a má-li v intervalu  $(a, b)$  derivaci

- $f'(x) > 0$ , pak je funkce  $f$  **rostoucí na intervalu  $\langle a, b \rangle$** ,
- $f'(x) < 0$ , pak je funkce  $f$  **klesající na intervalu  $\langle a, b \rangle$** .

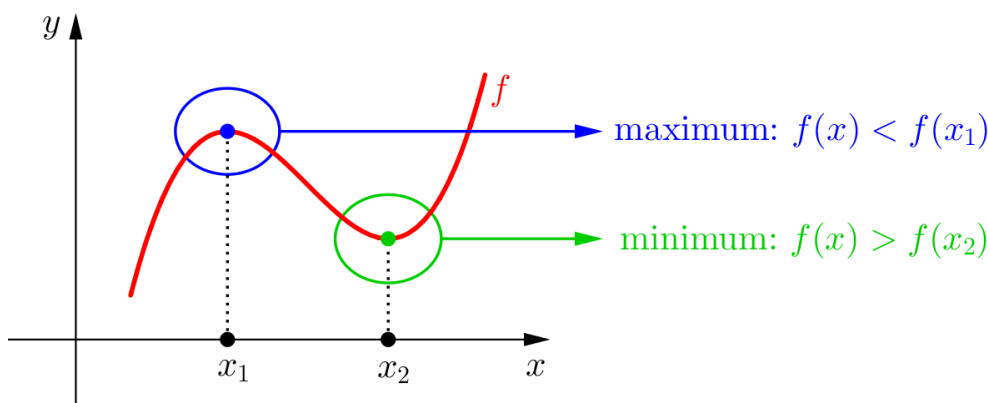
## Definice

Funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in D(f)$

ostré **lokální minimum**, resp. ostré **lokální maximum**,

jestliže existuje okolí  $\mathcal{P}(x_0, \delta) \subset D(f)$  tak, že pro všechna  $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$  platí  $f(x) > f(x_0)$ , resp.  $f(x) < f(x_0)$ .

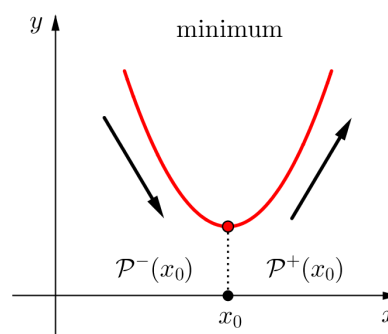
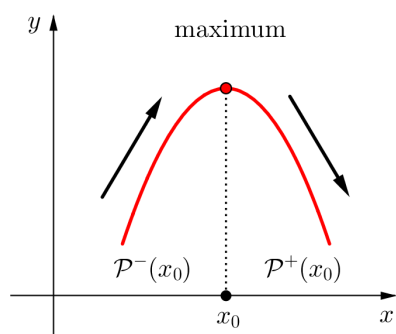
Ostré lokální maximum a minimum nazýváme ostré **lokální extrémny**.



## Věta

Je-li funkce  $f$  spojitá v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  a existuje-li prstencové okolí  $\mathcal{P}(x_0, \delta)$  takové, že  $f$  je

- v  $\mathcal{P}^-(x_0, \delta)$  rostoucí a v  $\mathcal{P}^+(x_0, \delta)$  klesající, pak má  $f$  v bodě  $x_0$  ostré lokální maximum,
- v  $\mathcal{P}^-(x_0, \delta)$  klesající a v  $\mathcal{P}^+(x_0, \delta)$  rostoucí, pak má  $f$  v bodě  $x_0$  ostré lokální minimum.



Funkce  $f$  může mít lokální extrémny

- v bodech, v nichž  $f'(x_0) = 0$  ... **stacionární body**,
- v bodech, v nichž  $f$  nemá derivaci.

## Věta

Je-li  $f'(x_0) = 0$  a má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  druhou derivaci  $f''(x_0) \neq 0$ , pak má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  ostrý lokální extrém a to

- ostré lokální maximum, je-li  $f''(x_0) < 0$ ,
- ostré lokální minimum, je-li  $f''(x_0) > 0$ .

## Příklad

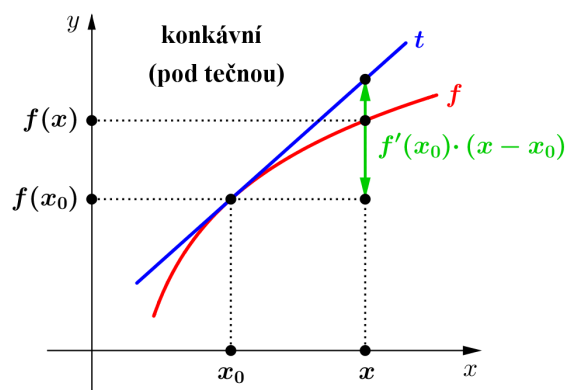
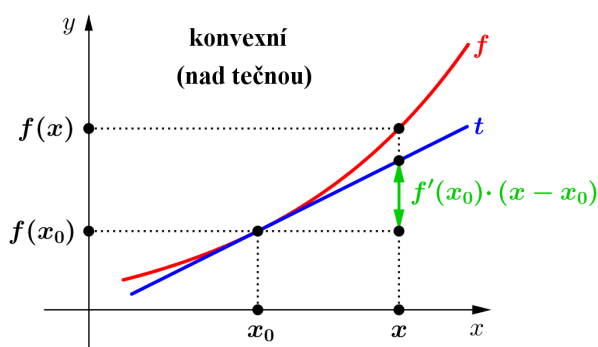
Určete intervaly monotonie a lokální extrémny funkce  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ .

## 3.8 Funkce konvexní a konkávní, inflexní body

## Definice

Má-li funkce  $f$  derivaci v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$ , pak řekneme, že  $f$  je v bodě  $x_0$  ryze **konvexní**, resp. ryze **konkávní**, jestliže existuje okolí  $\mathcal{P}(x_0, \delta)$  takové, že pro všechna  $x \in \mathcal{P}(x_0, \delta)$  platí

$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , resp.  $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ,  
tj. graf funkce  $f$  leží v  $\mathcal{P}(x_0, \delta)$  nad tečnou, resp. pod tečnou, sestrojenou v bodě  $[x_0, f(x_0)]$ .



### Věta

Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  druhou derivaci  $f''(x_0)$ , pak je-li

- $f''(x_0) > 0$ , je  $f$  v bodě  $x_0$  ryze konvexní,
- $f''(x_0) < 0$ , je  $f$  v bodě  $x_0$  ryze konkávní.

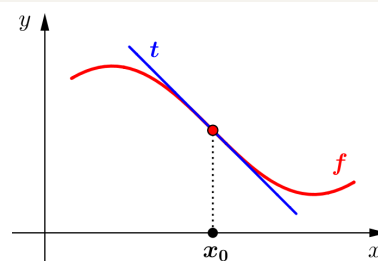
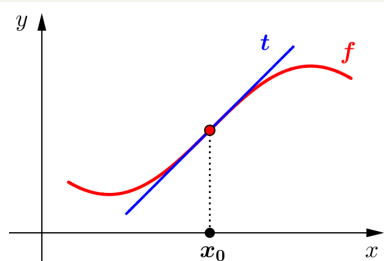
### Věta

Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a má-li v intervalu  $(a, b)$  druhou derivaci

- $f''(x) > 0$ , pak je funkce  $f$  **konvexní na intervalu  $\langle a, b \rangle$** ,
- $f''(x) < 0$ , pak je funkce  $f$  **konkávní na intervalu  $\langle a, b \rangle$** .

### Definice

Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  **inflexní bod**, jestliže v  $x_0$  existuje tečna ke grafu funkce  $f$  a  $f''$  mění v  $x_0$  znaménko, tj. funkce se v  $x_0$  mění z konvexní na konkávní, nebo obráceně.



Pro inflexní bod  $x_0$  funkce  $f$  platí:

- $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$ , nebo
- $f''(x_0)$  neexistuje.

### Příklad

Určete intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body funkce  $f(x) = x \ln(x - 1)$ .

## 3.9 Asymptoty grafu funkce

### Definice (Asymptota bez směrnice)

Přímka

$$x = x_0$$

se nazývá **asymptota bez směrnice** funkce  $f$  v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$ , jestliže má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

### Asymptoty bez směrnice

- nazýváme také **svislé asymptoty**
- mohou být v bodech nespojitosti funkce, tj. v bodech  $x_0 \notin D(f)$ , nebo na okraji definičního oboru
- jsou rovnoběžné s osou  $y$

### Definice (Asymptota se směrnicí)

Přímka

$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

se nazývá **asymptota se směrnicí** funkce  $f$  pro  $x \rightarrow \infty$ , resp. pro  $x \rightarrow -\infty$ , právě tehdy, když

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$$

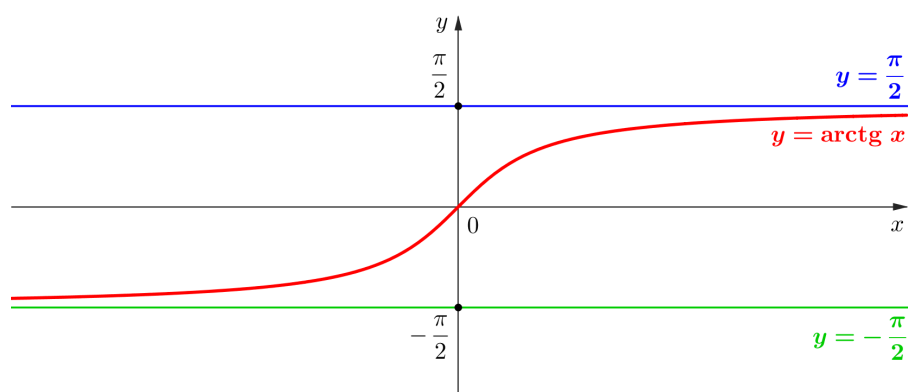
resp.

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

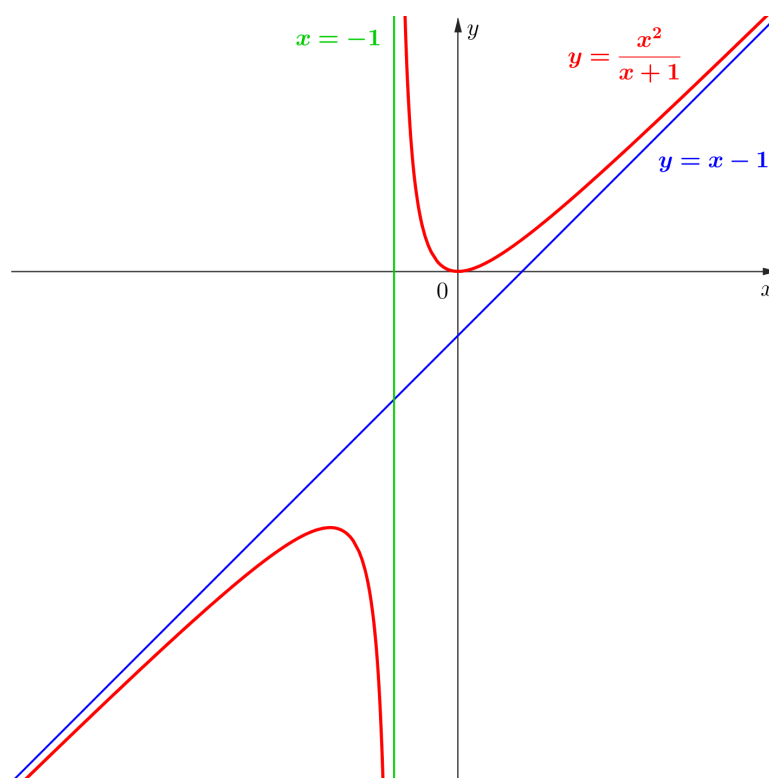
### Asymptoty se směrnicí

- pro  $a = 0$  nazýváme také **vodorovné asymptoty**
- pro  $a \neq 0$  nazýváme také **šikmé asymptoty**
- vodorovné asymptoty  $y = b$  jsou rovnoběžné s osou  $x$
- šikmé asymptoty  $y = ax + b$  protínají osy  $x$  a  $y$
- pokud při výpočtu koeficientů  $a, b$  jedna z limit **neexistuje** nebo je **nevlastní**, pak funkce asymptotu se směrnicí **nemá**

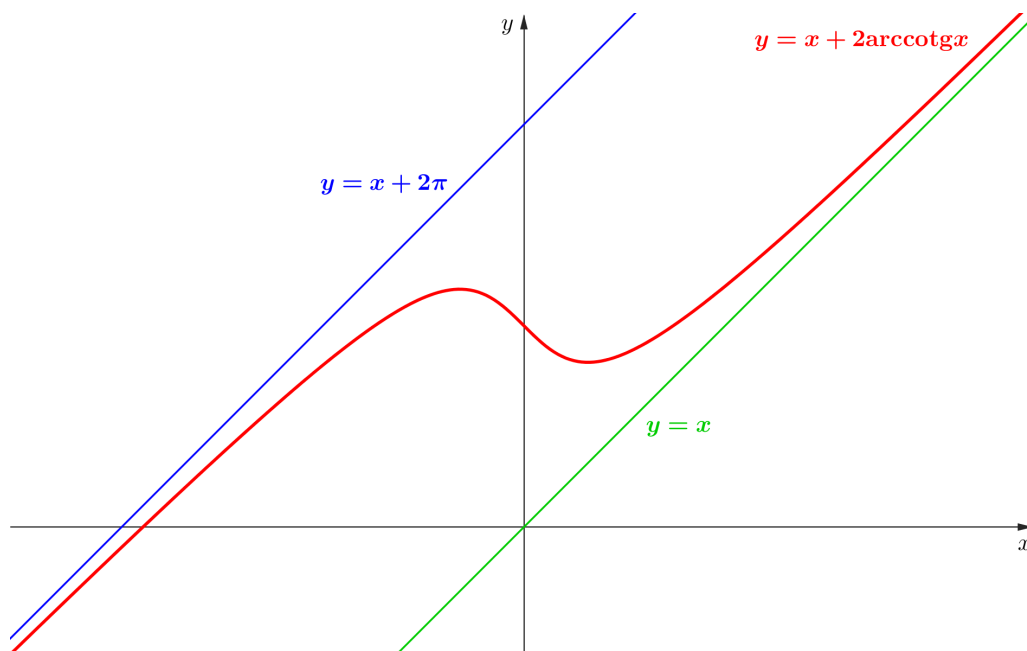
## 3.9 Asymptoty grafu funkce



## 3.9 Asymptoty grafu funkce







### Příklad

Určete asymptoty funkce  $f$ .

a)  $f(x) = \frac{x + 2}{3x - 1}$

b)  $f(x) = \frac{6x^2 + 2}{2x - 1}$

c)  $f(x) = \frac{x}{e^x}$

d)  $f(x) = 2x - \frac{\cos x}{x}$

1. **Z předpisu funkce:**  $D(f)$ , znaménko funkce, průsečíky grafu s osami, sudost / lichost, periodičnost
2. **Z první derivace:** rostoucí a klesající, lokální extrémy
3. **Z druhé derivace:** konvexní a konkávní, inflexní body
4. **Asymptoty:** se směrnicí a bez směrnice
5. **Graf:** ke všem výše zmíněným bodům dopočítáme funkční hodnoty a zkombinujeme zjištěné informace

### Příklad

Vyšetřete průběh funkce

a)  $f(x) = \frac{x^3}{3 - x^2}$

b)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

**DĚKUJI  
ZA  
POZORNOST!**